УДК 550.831+550.8

Ю. І. Дубовенко

Про визначення початкового наближення для контактної задачі

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Запропоновано аналітичні моделі гравітаційного поля і горизонтально-шаруватого геологічного середовища. Перша модель отримана з плоского нормального потенціалу сили тяжіння в локальній точці. Інша модель — клас Чорного контактних поверхонь — отримана з відомого класу Страхова. Подано нові числові алгоритми для визначення початкового наближення густинного контакту та його асимптот у цьому класі.

Сучасні методи обробки геофізичних даних потребують створення *цифрових аналітичних моделей* поля і геологічного середовища, які націлені на застосування в ГІС. Для цього слід виробити відповідні аналітичні конструкції. Одну з них — модель середовища типу контакту пропонуємо до розгляду.

Визначення контакту у відомих моделях середовища Страхова, Нумерова, Маловичка [1] означає обчислення *різниці ундуляцій* теоретичної моделі середовища та деякого опорного її елемента, від якого ці ундуляції не дуже ухиляються. Але при цьому слід заздалегідь знати елементи геометрії (глибину, форму, орієнтацію) опорного елемента (моделі тіла) як початкового наближення ітерацій. Для горизонтально-шаруватого середовища виведено *аналітичні моделі* поля і геологічного середовища, в яких ці опорні елементи розраховують у процесі ітерацій.

Аналітична модель поля і середовища. Розглядаємо горизонтально-шаруватий простір $E^{(3)}$ з двома густинними межами ∂G_1 й ∂G_2 розділу шарів G_1 й G_2, відстань між якими $\mathrm{dist}(\partial G_1, \partial G_2) \geqslant 0$ при $2G_1 \bigcap G_2 = G_2$. В області $G_2 \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — точки області $G^- = G_1 \bigcup \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 = G_2 \bigcup \partial G_2$, $x = (x_1, x_2 x_3)$ — точки замкнутої необмеженої області $\overline{G}^+ = E^{(3)} \setminus G$, $\partial G^+ = \partial G_1$, а відстань між ними дорівнює $\gamma(x, \xi) = \left(\sum\limits_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2 \right)^{1/2}$.

Якщо область $\overline{G}_2$ заповнена масами з густиною $\delta_2(\xi)$, а область $G_0 = G_1 \setminus \overline{G}_2$ — з густиною $\delta_1(\xi)$ (рис. 1), де $\overline{n}(x)$ — одинична нормаль до поверхні ∂G^+, зовнішньої щодо G^-, то нормальна сила тяжіння дорівнює

$$u(x) \equiv \frac{\partial V(x)}{\partial \overline{n}(x)} = f \int\limits_{G^-} \delta(\xi) \frac{\partial}{\partial \overline{n}(x)} \frac{1}{\gamma(x, \xi)} d\xi, \tag{1}$$

де $\delta(\xi) = \delta_2(\xi) - \delta_1(\xi)$, $\xi \in \overline{G}_2$; $\delta(\xi) = 0$, $\xi \in \overline{G}_0$; f — гравітаційна стала.

Силу тяжіння описує функція

$$u(x) = |\operatorname{grad} V(x)| = f \int\limits_{G^-} \delta(\xi) |\operatorname{grad}_x \gamma^{-1}(x, \xi)| \, d\xi, \tag{2}$$

оскільки значення сили тяжіння — це значення модуля градієнта потенціалу [2], а не її складові, в тому числі й (1). Але для малої області Ω можна використати вираз (1).

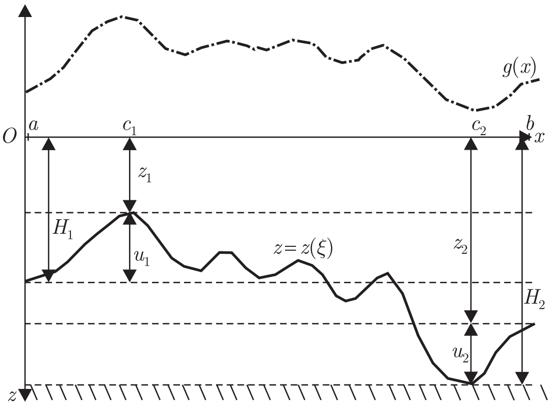


Рис. 1. Модель контактного середовища в класі Чорного

У цій області Ω, з відомою мірою наближення [3] ділянку $\partial G = \Omega \bigcap \partial G^+$ межі ∂G^+ вважаємо "необмеженою" площиною: $\partial G = \{x \colon x_3 = x_3(x_1, x_2) = \mathrm{const}, (x_1, x_2) \in S_0\}$, де $S_0 = \Omega \bigcap \partial G^+$. Нехай в околі Ω^- функції $\delta_1(\xi) = \mathrm{const}$, $\xi \in \overline{G}_2 \subset \Omega^-$, $\delta_2(\xi) = \mathrm{const}$, $\xi \in \Omega^- \bigcap G_1$, і $\delta = \delta_2 - \delta_1$, а $\overline{G}_2$ — власна підмножина Ω^-. Межу Ω обираємо достатньо гладкою, для якої $\partial G_2 = \{x \colon x_i = x_i(x_j, x_k),\ (x_j, x_k) \in \partial S_i,\ i, j, k = 1, 2, 3;\ \bigcup \partial S_i = \partial G_2;\ x_i \in \in\ C^{(1,\alpha)}(\partial S_i)\}$.

За таких умов стосовно середовища викладених вище, отримуємо потенціал тяжіння:

$$u(x_{1,2,3}) \equiv \frac{\partial V(x_{1,2,3})}{\partial x_3} = f\sigma \int\limits_{\Omega^-} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\gamma^2(x, \xi)}. \tag{3}$$

Нерідко маси, що зосереджені в Ω^-, генерують аномалії $u(x_i)$, які витягнуті, скажімо, уздовж осі Ox_2. Їх доцільно вимірювати по профілях, паралельних $O\xi_1$. Формула (3) непридатна для обробки таких вимірів. Але, інтегруючи вираз (3) за ξ_2 при умові, що $x_3 = 0$, $\xi_3 = \xi_3(\xi_1)$, $a \leqslant \xi_1 \leqslant b$, отримаємо аналітичну модель поля:

$$u(x, 0) = f\sigma \int\limits_a^b d\xi_1 \int\limits_{\xi_3^{(1)}}^{\xi_3^{(2)}} \frac{2\xi_3}{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^{(2)}} d\xi_3 = f\sigma \int\limits_a^b \ln \frac{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^{(2)}(\xi_1)}{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^{(1)}(\xi_1)} d\xi_1, \tag{4}$$

де $\xi_3^{(1)} = \xi_3^{(1)}(\xi_1)$ і $\xi_3^{(2)} = \xi_3^{(2)}(\xi_1)$, $a \leqslant \xi_1 \leqslant b$ — криві, що обмежують знизу і згори тяжіючу плоску область S.

Аналітична модель середовища є підкласом одного з класів контактних поверхонь, для яких гарантовано єдиність розв'язку обернених задач гравіметрії [4–6].

У класі Остромогильського $\mathrm{Ost}^{(1,\alpha)}(a, b)$ однозначно визначають змінну густину $\delta(\xi_1, \xi_3)$ і контакт $x_3(\xi_1)$ за значеннями зовнішнього поля [4] для заданого контакту:

$$x_3(\xi_1) = \begin{cases} -h + \delta x_3(\xi_1), & \xi \in [a, b], \\ -h, & \xi_1 \notin [a, b], \end{cases} \tag{5}$$

де $\delta x_3(a) = \delta x_3(b) = 0$, $x_3(\xi_1)$ — кусково-неперервна функція;

$$\begin{aligned} &|\delta x_3(x_1)| \geqslant c(x_1 - a)^{1+\alpha}, \qquad a \leqslant x_1 \leqslant a + \delta, \qquad \alpha > 0, \\ &|\delta x_3(x_1)| \geqslant c(b - x_1)^{1+\alpha}, \qquad b - \delta \leqslant x_1 \leqslant b, \qquad \alpha > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

З підкласів $\mathrm{Ost}^{(1,\alpha)}_{(+)}$ й $\mathrm{Ost}^{(1,\alpha)}_{(-)}$ легко утворити моделі антикліналей і синкліналей.

У класі Страхова $\mathrm{St}^{(1,\alpha)}(a,b)$ [5] контакт задається рівнянням

$$x_3(\xi_1) = \begin{cases} -h_1 + \delta x_3(\xi_1), & \xi_1 \in [a,b), \\ -h_2, & \xi_1 = b, \end{cases} \tag{7}$$

де $\delta x_3(a) = 0$, $h_1, h_2 > 0$, $x_3(\xi_1) \leqslant 0$ — кусково-неперервна функція, задовольняє на кінцях інтервалу умовам

$$\begin{aligned} &|\delta x_3(\xi_1)| \geqslant a_1(\xi_1 - a)^{1+\alpha}, \qquad a \leqslant \xi_1 \leqslant a + \delta, \qquad \alpha > 0, \\ &|\delta x_3(\xi_1)| \geqslant b_1(b - \xi_1)^{1+\alpha}, \qquad b - \delta \leqslant \xi_1 \leqslant b, \qquad \delta > 0, \end{aligned} \tag{8}$$

набуваючи на $[a,b]$ скінченне число екстремумів. Контакт можна обмежити так:

$$z_S = z(c_1) = \sup \underset{[a,b]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi_1), \quad -z_S \leqslant h_1, \qquad z_i = z(c_2) = \inf \underset{[a,b]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi_1), \quad -z_i \leqslant h_2, \tag{9}$$

де c_1, $c_2 \in [a,b]$, а точки c_1, c_2 — внутрішні точки відрізку $[a,b]$, або збігаються з його межами. У останньому випадку за умови $h_1 < h_2$ маємо $c_1 = a$, $c_2 = b$.

Якщо $a = -\infty$, $b = +\infty$, вирази (7), (8) набувають вигляду

$$\begin{aligned} &z = z(\xi) = -h_1 + \delta z(\xi), \qquad \xi \in (-\xi_0, \xi_0), \\ &|z(\xi) - h_1| \leqslant a_2|\xi|^{-\beta}, \qquad |\xi| \geqslant \xi_0, \\ &|z(\xi) - h_2| \leqslant b_2|\xi|^{-\beta}, \qquad \beta > 0, \end{aligned} \tag{10}$$

де $h_1, h_2 > 0$, а $z_S = z(c_0) = \sup\{\underset{[-\xi_0,\xi_0]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi_1)\}$, $z_i = z(c_2) = \inf\{\underset{[-\xi_0,\xi_0]}{\mathrm{extr}}\, z(\xi_1)\}$ при c_1, $c_2 \in$ $\in [-\xi_0, \xi_0]$, і (для певності) нехай $-z_S \leqslant h_1$, $-z_i \leqslant h_2$, $0 < h_1 < h_2$. Для такого контакту шарів сталої густини встановлена єдиність [5].

Нехай G^- — горизонтальна смуга, що обмежена згори і знизу прямими $z_1 = h_1$, $z = h_2$, $0 < h_1 < h_2 < +\infty$, розділена на два шари зі щільністю δ_1 й δ_2 нескінченно гладкою кривою ∂G^-, з асимптотою $z = h$, $h_1 < h < h_2$, зірчастою щодо нескінченно віддаленої точки, де

$$|z(\xi) - h| \leqslant k|\xi|^{\alpha}, \qquad \alpha > 0, \qquad |\xi| > \xi_0, \qquad z(\xi) \in \partial G. \tag{11}$$

Якщо значення h і стрибок густини $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ відомі, то контакт ∂G шарів за зовнішнім полем відновлюється *однозначно* і є функцією класу (11), який, в свою чергу, є підкласом класу (10). Назвемо клас (11) $\mathrm{Ch}^{(1,\beta)}(-\infty,\infty)$ класом Чорного (вітчизняного науковця-геофізика А. В. Чорного, який заклав основи дослідження функціоналів для контактних поверхонь). Клас (10) названо класом Страхова $\mathrm{St}^{(1,\beta)}(-\infty,\infty)$. Очевидно, що правдиві відношення:

$$\mathrm{Ost}^{(1,\alpha)}(a,b) \subset \mathrm{St}^{(1,\alpha)}(a,b), \qquad \mathrm{Ch}^{(1,\beta)}(-\infty,\infty) \subset \mathrm{St}^{(1,\beta)}(-\infty,\infty) \supset \mathrm{St}^{(1,\alpha)}(a,b). \tag{12}$$

Ця модель відображає складний розподіл мас — n рудних тіл або контактів, які попарно не перетинаються (див. рис. 1). Головною проблемою є єдиність розв'язку задачі (4) в класі (11). Ця єдиність гарантована у вузьких підкласах класів (12). Їх можна окреслити за наявності потужної апріорної інформації про середовище (11). У разі її відсутності лишається сподіватися на відомі наслідки з теорем розділення полів, які є справедливими і для моделі (11).

Алгоритми обчислення контакту. Щоб розв'язати нелінійне інтегральне рівняння (4), задавши сталі асимптоти, які належать одній з множин (12) допустимих функцій, після ряду перетворень отримаємо таке рівняння:

$$u(x) = k\int\limits_a^b \ln\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + H^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + x_3^2(\xi_1)}d\xi_1. \tag{13}$$

Розглядаючи його як функціонал $g(x,z)$ від шуканої функції $x_3(\xi_1)$у лінійному просторі, знайдемо приріст $\Delta g(x,z) = g(x,z+h) - g(x,z)$, де $h(a) = h(b) = 0$:

$$\Delta g(x,z) = -\int\limits_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi-x)^2 + z^2(\xi)}h(\xi)\,d\xi - \int\limits_a^b\left\{\frac{[(\xi-x)^2 - z^2(\xi)]}{[(\xi-x)^2 + z^2(\xi)]^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}\left[-\frac{3\delta z(\xi)}{\{(\xi-x)^2 + \delta z^2(\xi)\}^2} + \frac{4\delta z(\xi)}{\{(\xi-x)^2 + \delta z^2(\xi)\}^3}\right]h(\xi)\right\}h^2(\xi)\,d\xi \tag{14}$$

та $\delta z(\xi) = z(\xi) + \theta(\xi)h(\xi)$. Після ряду аналітичних перетворень на його основі отримуємо кілька способів відновлення контакту $x_3(\xi_1)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ за заданим полем $g(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, $[a,b] \subset [c,d]$ за умови $\mathrm{mes}[a,b] < \mathrm{mes}[c,d]$.

Зокрема, при заданих a, b, H знаходимо $\Delta z(\xi) = z_{n+1}(\xi) - z_n(\xi)$, де

$$\int\limits_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)}z_{n+1}(\xi)\,d\xi =$$
$$= \int\limits_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2 + H^2}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)}d\xi - g(x) + \int\limits_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)}\,\Delta z_n(\xi)\,d\xi. \tag{15}$$

При $z_{n+1}(\xi) = z_n(\xi) + h_n(\xi)$, $n = 0,1,2,\ldots$, $h_0(\xi) = 0$, та відомому значенні $z_0(\xi) : z_1(\xi) = z_0(\xi) + h_0(\xi)$ маємо:

$$-\int\limits_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)}h_{n+1}(\xi)\,d\xi = \int\limits_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2 + H^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)}d\xi - g(x), \tag{16}$$

$$-\int\limits_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)}h_{n+1}(\xi)\,d\xi =$$
$$= \int\limits_a^b \ln\frac{(\xi-x)^2 + H^2}{(\xi-x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)}d\xi - g(x) + \int\limits_a^b \frac{(\xi-x)^2 - z_n^2(\xi)}{[(\xi-x)^2 + z_n^2(\xi)]^2}h_n^2(\xi)\,d\xi. \tag{17}$$

Подібним чином, крім контакту $z = z(\xi)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$, знайдемо “асимптоту” $H = \mathrm{const}$: наприклад, задаючи H_0 і $z_0(\xi)$, вважаючи, що $z_{n+1}(\xi) = z_n(\xi) + \Delta z_n(\xi)$, $H_{n+1} = H_n + \Delta H_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, і $\Delta z_0(\xi) \equiv 0$, $\Delta H_0 \equiv 0$, $a \leqslant \xi \leqslant b$, отримуємо аналог виразу (15):

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} \Delta z_n(\xi)\, d\xi - \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi - x)^2 + H_n^2} \Delta H_n d\xi =$$

$$= \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + H_n^2}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} d\xi - g(x). \tag{18}$$

Існують відповідні аналоги для виразів (16) й (17), що отримані за додаткової умови

$$\begin{aligned} &z_{n+1}(\xi) = z_n(\xi) + h_n(\xi), \qquad H_{n+1} = H_n + \tau_n, \\ &h_0(\xi) \equiv 0, \qquad \tau_0 \equiv 0, \qquad H_1 = H_0, \qquad z_1 = z_0(\xi). \end{aligned} \tag{19}$$

Вибір початкових наближень. У виразах (15)–(18) істотною є проблема вибору початкового наближення контакту. Розв’яжемо її таким чином.

Нехай крива $g(x)$, $c \leqslant x \leqslant d$ має на $[c, d]$ кілька екстремумів у точках $c_i \in [c, d]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $\delta > 0$, то кожному екстремуму відповідає однойменний екстремум $z = z(\xi)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$. Визначимо у множині $\{\operatorname*{extr}_{[c,d]} g(x)\}$ найбільший максимум $z_S \equiv g(c_i) = \sup\{\operatorname*{extr}_{[c,d]} g(x)\}$ і найменший мінімум $z_i \equiv g(c_j) = \inf\{\operatorname*{extr}_{[c,d]} g(x)\}$. Нехай $z_S \equiv z(c_i) = \sup\{\operatorname*{extr}_{[c,d]} z(\xi)\}$, $z_i \equiv z(c_j) = \inf\{\operatorname*{extr}_{[c,d]} z(\xi)\}$ — відповідні екстремуми z (тут абсциси g_S й z_S (g_i й z_i) збігаються, що не в усіх випадках вірно.

Початкове наближення контакту задаємо двома способами:

$$z_0 = z_0(\xi) = -H_0 + \Delta g(\xi, H_0), \qquad a \leqslant \xi \leqslant b, \tag{20}$$

$$z_0 = z_0(\xi) = -H_0 + k_0 \Delta g(\xi), \qquad a \leqslant \xi \leqslant b, \tag{21}$$

де $H_0 > 0$ — задана стала “асимптота” z_0 на лівому кінці $[a, b]$, $\Delta g(\xi) = g(\xi) - g(a)$, $\Delta g(\xi, H_0)$ — аналітично продовжене значення $\Delta g(\xi)$ на рівні $-H_0$, $k_0 = k(H_0)$ — невідомий коефіцієнт.

Знайдемо k_0. Нехай у точці $c \in [a, b]$ розташована z_S (z_i). Отримаємо такі нерівності для визначення початкових z_S й z_i при заданих H, g_S й g_i:

$$\begin{aligned} g_S \geqslant{} & (1 - c_i) \ln \frac{(1 - c_i)^2 + H^2}{(1 - c_i)^2 + z_S^2} + c_i \ln \frac{c_i^2 + H^2}{c_i^2 + z_S^2} + 2H \operatorname{arctg} \frac{H}{H^2 - c_i(1 - c_i)} - \\ & - 2z_S \operatorname{arctg} \frac{z_S}{z_S^2 - c_i(1 - c_i)}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} g_i \leqslant{} & (1 - c_j) \ln \frac{(1 - c_j)^2 + H^2}{(1 - c_j)^2 + z_i^2} + c_j \ln \frac{c_j^2 + H^2}{c_j^2 + z_i^2} + 2H \operatorname{arctg} \frac{H}{H^2 - c_j(1 - c_j)} - \\ & - 2z_i \operatorname{arctg} \frac{z_i}{z_i^2 - c_j(1 - c_j)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Відшукання значень z_S й z_i однотипне, тому індекси опущено. Утворимо функцію

$$f(z) = (1-c)\ln[(1-c)^2 + z^2] + c\ln(c^2 + z^2) + 2z\operatorname{arctg}\frac{z}{z^2 - c(1-c)} -$$
$$-(1-c)\ln[(1-c)^2 + H^2] - c\ln(c^2 + H^2) - 2H\operatorname{arctg}\frac{H}{H^2 - c(1-c)} + g. \qquad (24)$$

Наближення z_n якогось із значень z_S й z_i визначаємо за схемою Чебишева [7]:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{f''(z_n)f^2(z_n)}{2f'^3(z_n)}, \qquad (25)$$

де $f(z)$ визначається з функції (24). Процес (25) при вдалому виборі z_n швидко збігається: 4 ітерації для отримання $z^{(0)}$ з точністю до 10^{-7}, що узгоджується з результатами праці [7].

Зауваження 1. З виразів (22), (23) випливає, що $f(z_S) \geqslant 0$, $f(z_i) \leqslant 0$, а за не дуже малих $H > 0$ маємо $f(z_S) > 0$, $f(z_i) < 0$. Тому корені z_B, z_H рівнянь $f(z_B, g_S) = 0$, $f(z_H, g_i) = 0$ дають наближення z_S й z_i знизу та зверху, що погіршує "якість" початкового наближення $z_0 = z_0(\xi)$.

Зауваження 2. Величини z_S (z_i) визначаються неякісно при великих H, тим паче, якщо вони є великими. Тому разом із z_S, z_i визначають при $\delta g = g(b) - g(a) \neq 0$, крім заданої лівої H^- і праву "асимптоту" H^+ кривої $z = z(\xi)$ за описаною вище схемою, тільки у виразі $f(z)$ замість g_S (g_i) беруть δg для визначення H^+.

Обчисливши для кожного заданого значення H_i^-, $i = 1, 2, \ldots, n$, лівої "асимптоти" шуканої кривої $z = z(\xi)$, $a \leqslant \xi \leqslant b$, значення параметрів $z_S^{(i)}$, $z_i^{(i)}$, H_i^+, $i = 1, 2, \ldots, n$, знайдемо

$$u^{(i)} = z_S^{(i)} - H_i^-, \qquad u_{(i)} = z_i^{(i)} - H_i^-, \qquad \Delta H_i = H_i^+ - H_i^-,$$
$$\delta g = g(b) - g(a), \qquad \delta g_{\max} = g_S - g(a), \qquad \delta g_{\min} = g_i - g(a), \qquad (26)$$

звідки $k_0^{(i)} = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{i=1}^{e} k_i^{(i)}$, де $k_1^{(i)} = \dfrac{|u^{(i)}|}{|\delta g_{\max}|}$, $k_2^{(i)} = \dfrac{|u_{(i)}|}{|\delta g_{\min}|}$, $k_3 = \dfrac{|\Delta H|}{|\delta g|}$.

Виведено нові аналітичні конструкції для обчислення складних контактів (20), (21). Для їх обчислення запропоновано процес простих ітерацій (25), а для послідовного уточнення виконують процес (26).

Схему відшукування початкового наближення для контактів з класів "антикліналей" і "синкліналей" $\mathrm{Ost}_{(\pm)}^{(1,2)}(a, b)$ апробовано на функціях, які моделюють антикліналь і синкліналь: $z(\xi) = -H + a(1-\xi)\xi$, $z(\xi) = -H - a(1-\xi)\xi$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Ці конструкції краще збігаються при обчисленні за першим зі способів (15)–(17) порівняно з відомими [8]. Для асимптот H_i^-, H_i^+ характер збіжності ітерацій є аналогічним.

1. *Чорний А. В., Дубовенко Ю. І.* Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофиз. журн. – 2002. – **24**, № 3. – С. 77–92.
2. *Дубовенко Ю. І.* Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Там само. – 2009. – **31**, № 6. – С. 132–139.
3. *Дубовенко Ю. И.* Об определении погрешностей гравиметрических трансформаций // Геофиз. журн. – 2011. – **33**, № 1. – С. 136–146.
4. *Остромогильский А. Х.* О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1970. – **10**, № 2. – С. 352–361.

5. *Страхов В. Н.* К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1974. – № 6. – С. 39–60.
6. *Чередниченко В. Г.* К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу // Докл. АН СССР. – 1978. – **240**, № 5. – С. 1032–1035.
7. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 2. – Москва: Физматгиз, 1960. – С. 140–143.
8. *Гравиразведка*: Справочник геофизика. – Москва: Недра, 1990. – 607 с.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 12.03.2013

Ю. И. Дубовенко

Об определении начального приближения для контактной задачи

Предложены аналитические модели гравитационного поля и горизонтально-слоистой геологической среды. Первая модель получена из плоского нормального потенциала силы тяжести в локальной точке. Другая модель — клас Черного контактных поверхностей — получена из известного класса Страхова. Даны новые численные алгоритмы для определения начального приближения плотностного контакта и его асимптот в этом классе.

Yu. I. Dubovenko

On the initial approximation definition for a contact problem

Analytical models for the gravity field and the horizontally layered geological medium are offered. The first model is derived from the 2-D normal gravity potential at a local point. The last model — a Chorny contact surfaces class — is derived from the known Strakhov class. New numerical algorithms for the definition of the start approximation of a density interface and its asymptotes in that class are given.